Prolongement de la fonction Gamma (235, 239, 241, 244, 245)

Objectif Agreg p. 82-83

thm 1 : La fonction $\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} dt$ est bien définie et holomorphe sur $\mathbb{C}^+ = \{z \in \mathbb{C} \mid Re(z) > 0\}$

démo : Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $t \longmapsto e^{(z-1)\ln(t)} e^{-t}$ est mesurable sur $]0,+\infty[$.

- $t \to 0$: $|t^{z-1} e^{-t}| = t^{Re(z)-1} e^{-t}$ intégrable car $Re(z) > 0$.
- $t \to +\infty$: $|t^{z-1} e^{-t}| = O\left(\frac{1}{t^2}\right)$ intégrable.

Donc Γ est bien définie sur $\mathbb{C}^+$.

* Pour tout $z \in \mathbb{C}^+$, $t \mapsto t^{z-1} e^{-t}$ est mesurable
* Pour tout $t \in]0,+\infty[$, $z \longmapsto t^{z-1} e^{-t}$ est holomorphe sur $\mathbb{C}^+$
* Soit K un compact de $\mathbb{C}^+$ et soit a et b tels que $0 < a \leq Re(z) \leq b < +\infty$.

  Pour tout $z \in K$, on a

$$|t^{z-1} e^{-t}| \leq t^{a-1} e^{-t} \mathbb{1}_{]0,1]} + t^{b-1} e^{-t} \mathbb{1}_{[1,+\infty[} \in L^1(]0,+\infty[) \text{ car } a > 0.$$

Donc par le théorème d'holomorphie sous le signe intégrale, on a $\Gamma \in \mathcal{H}(\mathbb{C}^+)$

thm 2 : La fonction Γ se prolonge en une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$ dont les seuls pôles sont simples et ce sont les entiers ~~strictement~~ négatifs (unique)

démo :

* <u>Etape 1</u> : Découpage de l'intégrale

$$\Gamma(z) = \int_0^1 e^{-t} t^{z-1} dt + \int_1^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} dt$$

On a $e^{-t} t^{z-1} = \sum_{n\geq 0} \frac{(-t)^n}{n!} . t^{z-1} = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{n!} t^{n+z-1}$

Donc $\Gamma(z) = \int_0^1 \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{n!} t^{n+z-1} dt + \int_1^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} dt$

On veut intervertir l'intégrale et la somme :

Pour $t > 0$, on a $|t^z| = t^{Re(z)}$ donc $\sum_{n\geq 0} \left|\frac{(-1)^n}{n!}\right| |t^{n+z-1}| = t^{Re(z)-1} \sum_{n \geq 0} \frac{t^n}{n!} = t^{Re(z)-1} e^t$

Or la fonction $t \longmapsto e^{-t}\, t^{\mathrm{Re}(z)-1} \in L^1(]0,1])$ car $\mathrm{Re}(z)>0$.

Ainsi par le thm de Fubini, on a :

$$\int_0^1 e^{-t}\, t^{z-1}\, dt = \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^1 t^{n+z-1}\, dt = \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{n!} \cdot \frac{1}{z+n}$$

D'où $\Gamma(z) = \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{(z+n)\,n!} + \int_1^{\infty} e^{-t}\, t^{z-1}\, dt$.

* Étape 2 : La fonction $g(z) = \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{(z+n)\,n!}$ est méromorphe sur $\mathbb{C}$.

On pose $f_n(z) = \frac{(-1)^n}{(z+n)\,n!}$ pour tout $n\geq 0$.

fraction rationnelle

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est méromorphe sur $\mathbb{C}$ avec pour seul pôle l'entier n qui est simple.
- Soit K un compact de $\mathbb{C}$, $\exists N \in \mathbb{N}$ tel que $K \subset \overline{D(0,N)}$. Pour $n > N$, la fonction f_n n'a pas de pôle dans K. De plus, pour tout $z \in K$, on a $|z+n| \geq n - |z| \geq n - N$

Par conséquent $|f_n(z)| \leq \frac{1}{n!\,(n-N)}$. Donc la série des $(f_n)_{n>N}$ converge normalement sur tout compact de $\mathbb{C}$.

Alors $g(z) = \sum_{n\geq 0} f_n(z)$ est méromorphe sur $\mathbb{C}$.

* Étape 3 : $h(z) = \int_1^{\infty} e^{-t}\, t^{z-1}\, dt$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$.

- Pour tout $t \in [1,+\infty[$, $z \longmapsto e^{-t}\, t^{z-1}$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$.
- Soit K un compact de $\mathbb{C}$ et $r>0$, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $-r \leq \mathrm{Re}(z) \leq r$.

Pour tout $t \in [1,+\infty[$

$$|t^{z-1}\, e^{-t}| \leq e^{-t}\, t^{r-1} \in L^1([1,+\infty[)$$

Par le thm d'holomorphie sous le signe intégrale, h est holomorphe sur $\mathbb{C}$.

cas particulier du thm 1 donc déjà démontré

* Étape 4 : Conclusion :

Ainsi la fonction $z \longmapsto \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{(z+n)\,n!} + \int_1^{+\infty} e^{-t}\, t^{z-1}\, dt$ est un prolongement méromorphe sur $\mathbb{C}$ de Γ.

Le thm de prolongement analytique entraîne que c'est l'unique prolongement analytique de Γ sur l'ouvert connexe $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}^-$.